中級ミクロ経済学 I（再履修）　5 月 28 日授業内課題

問題作成者：北村　友宏

学籍番号：____________________　氏名：______________________________

1. 財 2 種類（1 と 2），消費者 2 人（A と B）の交換経済を考える．消費者 A と B の効用関数は，それぞれ

$$u_A(x_{A1}, x_{A2}) = \sqrt{x_{A1}} + \sqrt{3x_{A2}},$$
$$u_B(x_{B1}, x_{B2}) = 2\sqrt{x_{B1}} + 2\ln x_{B2}$$

のように与えられている．また，消費者 A の初期保有は $(10, 4)$ であり，消費者 B の初期保有は $(20, 2)$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

（a）財 1 の総量と財 2 の総量を求めなさい．

（b）消費者 A の財 1 と財 2 の限界効用を求めなさい．

（c）消費者 B の財 1 と財 2 の限界効用を求めなさい．

（d）パレート最適配分においては両方の消費者の限界代替率が等しい（エッジワース・ボックス上で両者の無差別曲線が接する）という条件を利用し，パレート最適配分における**消費者 A の財 2 の消費量** x_{A2}を，消費者 A の財 1 の消費量 x_{A1}，消費者 B の財 1 の消費量 x_{B1}，消費者 B の財 2 の消費量 x_{B2} の 3 変数の式で表しなさい．

（e）財 1 と財 2 の実行可能性制約を書きなさい．

（f）消費者 A が財 1 を 12 単位消費するとき，実行可能性制約を満たす消費者 B の財 1 の消費量を求めなさい．

（g）パレート最適配分のうち，消費者 A が財 1 を 12 単位消費する配分を求めなさい．

授業内課題解答

解答作成者：北村　友宏

※答案には重要な計算過程を示していればよい．ここまで詳しく説明する必要はない．

1.（a）財 1 の総量は，

$$\underbrace{10}_{\text{消費者 A}} + \underbrace{20}_{\text{消費者 B}} = 30.$$

財 2 の総量は，

$$\underbrace{4}_{\text{消費者 A}} + \underbrace{2}_{\text{消費者 B}} = 6.$$

（b）消費者 A の財 1 の限界効用 $MU_{A1}(x_{A1}, x_{A2})$ は，

$$MU_{A1}(x_{A1}, x_{A2}) = \frac{\partial u_A(x_{A1}, x_{A2})}{\partial x_{A1}} = \frac{1}{2}(x_{A1})^{-\frac{1}{2}}.$$

$t(x_{A2}) = 3x_{A2}$ とすると，

$$u_A(x_{A1}, x_{A2}) = \sqrt{x_{A1}} + \sqrt{t(x_{A2})}.$$

よって，消費者 A の財 2 の限界効用 $MU_{A2}(x_{A1}, x_{A2})$ は，

$$MU_{A2}(x_{A1}, x_{A2}) = \frac{\partial u_A(x_{A1}, x_{A2})}{\partial x_{A2}} = \frac{1}{2}[t(x_{A2})]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt(x_{A2})}{dx_{A2}} = \frac{1}{2}(3x_{A2})^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2}(3x_{A2})^{-\frac{1}{2}}.$$

（c）消費者 B の財 1 の限界効用 $MU_{B1}(x_{B1}, x_{B2})$ は，

$$MU_{B1}(x_{B1}, x_{B2}) = \frac{\partial u_B(x_{B1}, x_{B2})}{\partial x_{B1}} = 2 \cdot \frac{1}{2}(x_{B1})^{-\frac{1}{2}} = (x_{B1})^{-\frac{1}{2}}.$$

消費者 B の財 2 の限界効用 $MU_{B2}(x_{B1}, x_{B2})$ は，

$$MU_{B2}(x_{B1}, x_{B2}) = \frac{\partial u_B(x_{B1}, x_{B2})}{\partial x_{B2}} = 2 \cdot \frac{1}{x_{B2}} = \frac{2}{x_{B2}}.$$

（d）パレート最適となる条件は，

$$\underbrace{-\frac{MU_{A1}(x_{A1},x_{A2})}{MU_{A2}(x_{A1},x_{A2})}}_{\text{消費者 A の限界代替率}} = \underbrace{-\frac{MU_{B1}(x_{B1},x_{B2})}{MU_{B2}(x_{B1},x_{B2})}}_{\text{消費者 B の限界代替率}} \Leftrightarrow -\frac{\frac{1}{2}(x_{A1})^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(3x_{A2})^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{(x_{B1})^{-\frac{1}{2}}}{2/x_{B2}}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(x_{A1})^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(3x_{A2})^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(x_{B1})^{-\frac{1}{2}}}{2/x_{B2}} && \text{両辺} \times(-1)\\
&\Leftrightarrow \frac{(x_{A1})^{-\frac{1}{2}}}{3(3x_{A2})^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(x_{B1})^{-\frac{1}{2}}}{2/x_{B2}} && \text{左辺の分母と分子} \times 2\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x_{A1})^{-\frac{1}{2}}(3x_{A2})^{\frac{1}{2}} = \frac{(x_{B1})^{-\frac{1}{2}}}{2/x_{B2}} && \text{左辺の分母と分子} \times (3x_{A2})^{\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x_{A1})^{-\frac{1}{2}}(3x_{A2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{B1})^{-\frac{1}{2}}x_{B2} && \text{右辺の分母と分子} \times x_{B2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{9}(x_{A1})^{-1}\cdot 3x_{A2} = \frac{1}{4}(x_{B1})^{-1}(x_{B2})^2 && \text{両辺 2 乗}\\
&\Leftrightarrow (x_{A1})^{-1}\cdot 3x_{A2} = \frac{9}{4}(x_{B1})^{-1}(x_{B2})^2 && \text{両辺} \times 9\\
&\Leftrightarrow 3x_{A2} = \frac{9}{4}x_{A1}(x_{B1})^{-1}(x_{B2})^2 && \text{両辺} \times x_{A1}\\
&\Leftrightarrow x_{A2} = \frac{3}{4}x_{A1}(x_{B1})^{-1}(x_{B2})^2. && \text{両辺} \div 3 \qquad (1)
\end{aligned}$$

（e）財 1 の実行可能性制約は，

$$x_{A1} + x_{B1} = 10 + 20 \Leftrightarrow x_{A1} + x_{B1} = 30. \qquad (2)$$

財 2 の実行可能性制約は，

$$x_{A2} + x_{B2} = 4 + 2 \Leftrightarrow x_{A2} + x_{B2} = 6. \qquad (3)$$

（f）消費者 A が財 1 を 12 単位消費する，つまり

$$x_{A1} = 12 \qquad (4)$$

のとき，(2) に (4) を代入すると，実行可能性制約を満たす消費者 B の財 1 の消費量は，

$$12 + x_{B1} = 30 \Leftrightarrow x_{B1} = 30 - 12 = 18. \qquad (5)$$

（g）x_{A2} を求めたいので，(1) を，x_{A2} だけを変数とする方程式に書き換える．(3) より，

$$x_{B2} = 6 - x_{A2}. \qquad (3')$$

消費者 A が財 1 を 12 単位消費するとき，(1) に (4)，(5)，(3′) を代入すると，

$$x_{A2} = \frac{3}{4}\cdot 12\cdot 18^{-1}(6-x_{A2})^2 = \frac{3}{4}\cdot 12\cdot\frac{1}{18}(6-x_{A2})^2 = \frac{1}{2}\left[36 - 12x_{A2} + (x_{A2})^2\right] = 18 - 6x_{A2} + \frac{1}{2}(x_{A2})^2.$$

よって，

$$\begin{aligned}
x_{A2} = 18 - 6x_{A2} + \frac{1}{2}(x_{A2})^2 &\Leftrightarrow 0 = 18 - 6x_{A2} - x_{A2} + \frac{1}{2}(x_{A2})^2 && \text{左辺の } x_{A2} \text{ を右辺に移項}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_{A2})^2 - 7x_{A2} + 18 = 0 && \text{左辺と右辺を入れ替え}\\
&\Leftrightarrow (x_{A2})^2 - 14x_{A2} + 36 = 0. && \text{両辺} \times 2
\end{aligned}$$

よって，

$$x_{A2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 1 \cdot 36}}{1} = 7 \pm \sqrt{49 - 36} = 7 \pm \sqrt{13}.$$

(3) より，

$$x_{A2} \leqslant 6$$

なので，

$$x_{A2} = 7 + \sqrt{13} > 6$$

は不適．したがって，

$$x_{A2} = 7 - \sqrt{13}.$$

これを (3′) に代入すると，

$$x_{B2} = 6 - x_{A2} = 6 - \left(7 - \sqrt{13}\right) = -1 + \sqrt{13}.$$

パレート最適配分のうち，消費者 A が財 1 を 12 単位消費する配分は，

$$(x_A, x_B) = ((x_{A1}, x_{A2}), (x_{B1}, x_{B2})) = \left(\left(12, 7 - \sqrt{13}\right), \left(18, -1 + \sqrt{13}\right)\right).$$